Wie löst man solche Aufgaben (zur Bestimmung der Extremwerte)?

$$\boxed{T(x) = x(12x - 72) + 6}$$

0.) Schema „Ausmultiplizieren und Sortieren"

Bei dieser Aufgabe fällt auf, dass der Term nicht die klassische Form der Binomischen Formel aufweist. Dann müsste es nämlich einen Term mit x^2 geben, einen mit x und einen und eine Zahl ohne Variable. Dieses Schema hier dient dem Zweck, $T(x)$ in diese Form zu bringen. Und das geschieht über zwei Schritte: 1. Ausmultiplizieren und 2. Sortieren.

1 $T(x) = x \cdot 12x - x \cdot 72 + 6$ Nach dem Distributivgesetz „erster mal erster, erster mal zweiter …"

$T(x) = 12x^2 - 72x + 6$ Hier wurde nur die Reihenfolge verändert, also Zahlen nach links und Variablen nach rechts

Das Sortieren ist hier gar nicht erforderlich, so dass der Schritt bei unserer Aufgabe wegfällt. Deshalb hier ein Beispiel, wo das Sortieren stattfinden muss:

2 $T(x) = \frac{1}{4}x - 6{,}5 + 3\frac{2}{3}x^2$ Der quadratische Term steht rechts, wo die reine Zahl hingehört. Unordentlich das …

$T(x) = 3\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{4}x - 6{,}5$ So gehört sich das, so soll ein Binom sortiert sein ;-)))

I.) Schema „Ausklammern"

Bei den Binomischen Formeln steht vor dem x^2 nie eine Zahl (und immer ein +). Meistens steht aber doch eine Zahl (und ein Minus) davor, weshalb man sich eines Tricks bedient. Man klammert aus.

Wir kehren wieder zu unserem eigentlichen Term zurück, und der lautete so:

$T(x) = 12x^2 - 72x + 6$

3 $T(x) = 12[x^2 \ldots]$ Die 12 wird ausgeklammert, so dass das x^2 für sich steht. Wunderbar soweit. Aber nun: Vorsicht!

Wir klammern die 12 über den gesamten Term aus, weshalb die – 72x und die + 6 durch den ausgeklammerten Wert geteilt werden müssen. Der Term sieht also nach dem Ausklammern so aus:

4 $T(x) = 12\left[x^2 - \frac{72}{12}x + \frac{6}{12}\right]$ _Teilen_ oder _in den Nenner schreiben_ ist mathematisch ja dasselbe.

Die Brüche kann man in diesem Fall schön kürzen, so dass das Binom in der Klammer einfacher wird, weil es aus kleinere Zahlen besteht:

5 $T(x) = 12\left[x^2 - 6x + \frac{1}{2}\right]$

Das ½ in der eckigen Klammer ist leider die falsche Zahl, um aus dem Ausdruck in der eckigen Klammer eine Binomische Formel zu machen. Wenn dort eine 9 (= 3^2) stünde, wäre das eine mustergültige 2. Binomische Formel. Um trotzdem weiterrechnen zu können, wird wieder ein mathematischer Trick angewandt: Man ergänzt etwas, so dass es „zur Binomischen Formel reicht" – und deshalb heißt das Ding dann auch Quadratische Ergänzung.

II.) Schema „Quadratische Ergänzung“

Als erstes wenden wir uns dem Mischglied (das in der allgemeinen Form 2•a•b heißt) zu. Das zerlegen wir, damit wir aus ihm herauslesen können, welchen Zahlenwert b hat. Was a ist, das ist einfach zu sagen, denn a ist bei x^2 immer x (und bei z^2 immer z und bei y^2 immer y und bei r^2 immer r usw.).
Wir halbieren jetzt die Zahl, die im Mischglied steht. So wird hier aus der 6 eine 2 • 3.

6 $T(x) = 12\left[x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + \frac{1}{2}\right]$

Und nun ist es so, dass diejenige Zahl, die rechts neben der 2 steht (und mit ihr und dem x multipliziert wird) unser benötigtes b darstellt. Es gilt also in unserem Fall b = 3.

Jetzt geht es weiter im Schema der Quadratischen Ergänzung: Wir schieben die + ½ erst einmal ganz nach rechts, weil wir links von ihr etwas einfügen (und gleich wieder wegnehmen) wollen:

$$T(x) = 12\left[x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + \_\_\_\_ - \_\_\_\_ + \frac{1}{2}\right]$$

Und was wir da einfügen wollen, ist das b^2, das in unserem Fall 3^2 lautet.

7 $T(x) = 12\left[x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 - 3^2 + \frac{1}{2}\right]$

Aus den lila markierten Teilen des Terms kann man nun die Binomische Formel bilden. Bei unserem Beispiel ist es die zweite Binomische Formel, es kann aber auch mal die erste sein (nie jedoch die dritte).

8

$$T(x) = 12\left[x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 - 3^2 + \frac{1}{2}\right]$$

Und jetzt wird diese Binomische Formel in ihre „Klammerschreibweise“ umgewandelt.

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$T(x) = 12\left[(x - 3)^2 - 3^2 + \frac{1}{2}\right]$$

9 $T(x) = 12[(x - 3)^2 - 8{,}5]$ 3^2 ist gleich 9, ½ ist nichts anders als 0,5. Und – 9 + 0,5 ergibt – 8,5.

Jetzt soll noch die eckige Klammer weg, sonst klappt das Schema „Extremwerte“ nicht. Und weil die eckige Klammer sowohl das Binom $(x – 3)^2$ als auch die – 8,5 umschließt, müssen beide mit der 12 multiplizier werden. Das ergibt dann das:

10 $T(x) = 12(x - 3)^2 - 102$ Weil – 8,5 • 12 = 102 ist.

Und wenn der Term genauso dasteht, kann man nach dem letzten Schema die Extremwerte ablesen.

11 III.) Schema „Extremwerte“

Die Terme T(x) = a (x – m)^2 + n besitzen für

a > 0 ein Minimum

T_{min} = n für x = m

a < 0 ein Maximum

T_{max} = n für x = m